Pierre S. Laplace (1749-1827)

EL DESENVOLUPAMENT DE LES PROBABILITATS EN EL SEGLE XIX

per

Francesc d'A. Sales i Vallès

I. Les probabilitats abans del segle XIX

Als autors francesos els agrada molt explicar que el Càlcul de Probabilitats nasqué quan el Cavaller de Méré plantejà a Pascal els seus dos cèlebres problemes, ignorant, o volent ignorar, que anteriorment ja s'havien presentat qüestions semblants i s'havien resolt o intentat resoldre. Poden ésser citats, com a autors que tractaren aquests tipus de qüestions, Cardano, Tartaglia i Galilei.

Cal reconèixer, però, que el tractament que fa Fermat del segon problema (el de la repartició de l'aposta quan s'ha d'interrompre el joc) és de tal forma que permet generalitzacions i inclou, per bé que no de forma explícita, conceptes que poden ésser desenvolupats de forma més general, i és potser, en aquesta via que pot parlar-se de naixença del Càlcul de Probabilitats.

Huygens introdueix el concepte de *valor* del joc per donar una solució molt general al segon problema de Méré. Aquest concepte és el que després prendrà el nom (Jacques Bernoulli) d'*esperança matemàtica*.

És precisament Jacques Bernoulli qui en els seus comentaris a l'obra de Huygens empra d'una forma sistemàtica l'Anàlisi Combinatòria i intenta explicitar la definició de probabilitat que fins aleshores no havia preocupat gaire. Diu que "la coneixença és una quantitat. La certesa és aquesta quantitat sencera i la probabilitat n'és una fracció. La certesa total fa el paper de la unitat i es pot representar per 1, i per les parts fraccionàries de 1 expressar els infinits graus de probabilitat que pot passar l'esperit. Quan aquesta fracció es fa infinitament petita, el límit a què tendeix és 0, que és per a la intel·ligència l'expressió matemàtica de l'impossible". Observem que és una concepció del que ara se'n diu *probabilitat subjectiva*.

Daniel Bernoulli dóna la definició que ara anomenem clàssica: la probabilitat d'un succés és igual al quocient obtingut dividint el nombre de casos favorables perquè es produeixi el succés pel nombre total de casos possibles, sempre que els casos considerats siguin igualment possibles. Després parlarem més llargament d'aquesta definició. És, també, D. Bernoulli qui planteja l'anomenada paradoxa de St. Petersburg i introdueix el concepte d'*esperança moral*, que serà motiu de moltes discussions i controvèrsies. L'evolució d'aquest concepte donarà lloc al que els economistes actuals anomenen *"utilitat marginal"*.

Un autor d'una influència considerable en tot el desenvolupament de la Teoria de la Probabilitat és *Bayes.*

Per Bayes la probabilitat d'un succés és la raó entre el valor a què pot computar-se una esperança que depèn de l'ocurrència del succés i el valor esperat qualsevol que sigui l'ocurrència. Pot observar-se que aquesta definició té caràcter subjectiu i és evidentment inspirada per la idea de les apostes: si un jugador accepta apostes a 3 contra 1 sobre la verificació d'un succés és que, per ell, la probabilitat del succés és 3/4.

La qüestió que planteja Bayes en la seva obra pòstuma, "An Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances", és la següent: donat el nombre de vegades que un succés ha ocorregut i el nombre de vegades que no ha ocorregut, es demana la probabilitat que la probabilitat de la seva ocurrència en una sola prova estigui compresa entre dos graus de probabilitat donats.

És curiós de constatar que la fórmula que ara es diu "fórmula de Bayes" no és en la seva obra. És una conseqüència immediata de les fórmules donades per Bayes sobre probabilitats condicionades, però ell no la dedueix.

Els autors del que els anglesos anomenen "continent" fan llurs investigacions sobre probabilitats basant-se en problemes i exemples trets dels jocs d'atzar (daus, cartes, urnes, etc.), mentre que els autors anglesos es basen en apostes sobre casos que en general no es poden repetir (curses de cavalls, lluites esportives, eleccions polítiques, etc.). Això fa que des de quasi el principi del Càlcul de Probabilitats es presenti el contrast entre probabilitat objectiva i probabilitat subjectiva que encara dura.

Pot semblar que l'únic tema d'estudi dels probabilistes anteriors al segle XIX eren els jocs d'atzar, però això no és ben cert ja que Huygens ja veu que molts problemes demogràfics i altres que interessen les companyies d'assegurances presenten moltes analogies amb els problemes de la que podríem anomenar teoria dels jocs d'atzar, i per tant l'interès de l'estudi de les probabilitats no és merament teòric sinó que és important per al desenvolupament d'una disciplina que més endavant s'anomenarà "Estadística".

II. L'obra probabilística de Laplace

De tota l'obra desenvolupada durant el segle XIX en el terreny de les probabilitats ens fixarem en tres aspectes:

1. Les aplicacions de l'Anàlisi Matemàtica a la teoria de Probabilitats.
2. La llei normal.
3. La definició i la fonamentació del concepte de probabilitat.

Aquests tres temes ja es troben a l'obra de Laplace "Théorie analytique des probabilités" publicada el 1812 i dedicada a Napoleó.

Laplace és "absolutament determinista" en el sentit que creu que existeixen unes lleis generals de la Natura i que "tots els esdeveniments, àdhuc aquells que per llur insignificança no semblen seguir les grans lleis de la natura, són un resultat tan just i necessari com les revolucions del Sol". També escriu: "una intel·ligència que comprengués totes les forces de què la natura és animada i la posició respectiva de tot el que existeix –una intel·ligència suficient per a sotmetre aquestes dades a l'anàlisi– enclouria en una mateixa fórmula els moviments dels grans cossos de l'univers i els dels àtoms de llum; per ella res no seria incert i el futur i el passat serien presents en els seus ulls".

D'aquesta dita es desprèn clarament que Laplace creu que les lleis de la Natura s'expressen en forma d'equacions diferencials i hom pot explicar la seva posició determinista pels grans èxits assolits per l'Anàlisi Matemàtica en els problemes de la Mecànica. L'entusiasme que hi ha en el seu temps pel Càlcul Diferencial i Integral és tan gran i exagerat que Lagrange arriba a afirmar que tot el que és essencial en Matemàtica ja està fet i que la tasca dels futurs matemàtics es limitarà a perfilar detalls i a millorar l'exposició general.

Aquesta posició determinista de Laplace el condueix a les següents conclusions:

1. Eliminació de l'atzar. El Càlcul de Probabilitats no pot ésser una teoria de les lleis de l'atzar, perquè l'atzar no existeix. "La probabilitat està relacionada en part amb la nostra ignorància i en part amb el nostre coneixement".

2. Així com la natura, almenys dins els límits del sistema solar, obeeix l'única llei de la gravitació, respecte als fenòmens que ell anomena probabilístics hi ha una única llei que és la llei normal.

Laplace adopta la definició que ara en diem clàssica, ja formulada per D. Bernoulli, i pretén resoldre la qüestió crucial, de saber quan són igualment possibles dos esdeveniments, assegurant que ho són quan no hi ha cap raó per a pensar que un d'ells pot ocórrer més que no l'altre (absència de raó suficient). Diu però que aquest criteri es basa no en el nostre coneixement sinó en la ignorància de les veritables causes.

En aquest punt Laplace es col·loca en una posició subjectiva ja que l'estimació o determinació de la probabilitat depèn de l'observador o experimentador i per tant la probabilitat perd el caràcter objectiu com a característica numèrica de fenomen real definit (Gnedenko).

La llei o distribució normal la troba com a llei límit d'una distribució binomial. Moivre havia descobert aquesta llei per al cas de $p = 1/2$. Li dóna una importància excessiva i, conseqüent amb les seves idees, la fa llei única dels fenòmens no deterministes, incloent-hi tots els components de la vida humana.

En el que fa a l'aplicació de l'anàlisi, Laplace observa que en el desenvolupament de $(x + x^2 + \ldots + x^6)^n$ el coeficient de x^s és igual al nombre de resultats amb què n daus donen la suma de punts igual a s. Generalitza el mètode obtenint les funcions generatrius d'una successió a_n així: $f(x) =$

$\sum_{n=1} a_n x^n$. Aquest mètode l'aplica d'una forma sistemàtica. Cal observar que el nom d'algunes distribucions ve de la funció generatriu corresponent, així la distribució binomial es diu binomial perquè la seva funció generatriu és $f(x) = (px + q)^n$.

III. L'aplicació de l'anàlisi a les probabilitats

El mètode de la funció generatriu de Laplace s'aplica a una variable aleatòria X amb valors enters no negatius, així si

$$f(x) = \sum_{n=0} a_n x^n,$$

$$a_n = P(x = n) \quad \text{és} \quad f(1) = \sum_{n=0} a_n = 1.$$

En el temps en què Laplace idea i empra les funcions generatrius no s'havia desenvolupat la teoria de les sèries convergents, que, com se sap, és de Cauchy, però té la sort que el desenvolupament de les funcions generatrius és convergent per a $|x| < 1$ i es pot derivar i es té

$$f'(x) = \sum_{n=1} n\, a_n\, x^{n-1} \text{ i } f'(1) = \sum_{n=1} n\, a_n = EX$$

i en general

$$f^{(r)}(x) = \sum_{n=r} n(n-1)\ldots(n\ -(r-1)\quad a_n\, x^{n-r} \qquad \text{d'on}$$

$$f^{(r)}(1) = \sum_{n=r} n(n-1)\ldots(n-(r-1))\, a_n$$

que és el moment factorial d'ordre r, i es poden calcular facilment els moments ordinaris en funció dels moments factorials.

Des de quasi el principi hom notà certa analogia entre les probabilitats i la Mecànica, considerant la probabilitat com una massa adscrita a un punt material sobre la recta. Així l'esperança matemàtica és el centre de gravetat i el moment de segon ordre és el moment d'inèrcia; això féu que la nomenclatura de les probabilitats prengués aquesta denominació de la Mecànica.

Ara és fàcil raonar de la manera següent: si coneixem tots els moments d'una variable aleatòria X podem conèixer tots els moments factorials i per tant els coeficients a_n de la funció generatriu i per tant la distribució de probabilitat de la variable aleatòria X.

Això planteja l'anomenat "problema dels moments" que domina gran part dels tractats de probabilitat fins al principi del segle XX. Aquest problema es pot enunciar així:

Donada una successió m_n de nombres reals, ¿quines condicions ha de complir perquè les m_n siguin moments d'una variable aleatòria X?

També es planteja el problema:
Coneixent uns quants moments, per exemple el de 1r i 2n ordre, d'una variable aleatòria X, ¿quines propietats podem deduir de la distribució corresponent a X?

En aquest sentit hom estudia la significació de l'esperança i de la variança.

Si la variable aleatòria que hom considera no és de valors enters no negatius, la funció generatriu no existeix, però podem obtenir una funció generatriu de moments

$$f(t) = \sum_{n=1} \frac{m_n t^n}{n!}.$$

Aquesta funció generatriu de moments és

$$E(e^{tx})$$

ja que

$$E(e^{tx}) = E\left(\sum_{n=0} \frac{(tx)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0} (EX^n)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0} m_n t^n/n!$$

Aquesta és l'anomenada transformada de Laplace.

Tota aquesta bonica teoria trontollà quan Cauchy donà un exemple de distribució sense moments. És la distribució dita de Cauchy, que és absolutament contínua amb densitat $f(x) = \dfrac{1}{\Pi(1 + x^2)}$.

És curiós de constatar que la gràfica d'aquesta funció s'assembla molt a la de la normal i, a més, si tenim una sèrie empírica de punts que s'ajusten bé a la normal, també s'ajusten bé a la de Cauchy.

La solució del problema dels moments fou donada en el segle XX, quan P. Levy introduí l'anomenada funció característica $f(x) = E(e^{itx})$, o sigui la transformada de Fourier que, si hi ha moments, és

$$f(t) = \sum_{n=0} m_n \frac{i^n t^n}{n!}$$

i, si no n'hi ha, també existeix funció característica i per la fórmula d'inversió hom pot calcular la distribució corresponent. Aquí es presenta un fenomen corrent en la història de la Matemàtica: la solució d'una qüestió es resol de manera que en certa forma desapareix el problema.

A partir de la introducció de la funció característica el problema dels moments deixa de tenir interès teòric.

És interessant observar que la família de distribucions de Cauchy, que són les de densitat $f(x) = \frac{a}{\Pi(a^2 + x^2)}$, és estable com la família de normals, és a dir, la suma de variables aleatòries independents amb distribució de Cauchy té una distribució de Cauchy.

Čebyšev introdueix l'anomenat "mètode dels moments" per resoldre el problema de l'estimació de paràmetres, que és un problema més propi de l'Estadística que no del Càlcul de Probabilitats.

IV. La llei normal

La idea que la llei normal era una llei universal de l'atzar no aguantà gaire, però hom continuà creient que les distribucions de variables aleatòries o eren normals o es podien deduir de la normal per canvis de variable o per aproximacions mitjançant polinomis ortogonals relacionats amb la llei normal.

Sorgeix aviat la denominada llei logarítmica normal. El problema més general és trobar una funció $Z = f(X)$ tal que la distribució de Z sigui normal (Kapteyn). En el cas de la logarítmica normal $Z = \lg X$.

Un altre mètode per a trobar distribucions emparentades amb la normal és el dels polinomis d'Hermite. Aquests polinomis són polinomis ortogonals respecte a la llei normal, o sigui:

$$\int H_m \cdot H_n \, e^{-k^2 x^2} \, dx = 0, m \neq n,$$

$$\int H_n^2 \, e^{-k^2 x^2} \, dx = 2^n \, n! \; k^{2n-1}$$

i aleshores es defineixen funcions de densitat de probabilitat

$$f(x) = e^{-k^2 x^2} (a_0 + a_1 H_1 + \ldots + a_n H_n).$$

El coeficient a_m s'expressa en funció dels n primers moments, per tant si els coneixem podem donar l'expressió de f(x) i veure si s'ajusta a les dades empíriques.

Pearson al principi del segle actual observà que la densitat normal obeïa l'equació diferencial

$$\frac{y'}{y} = \frac{x - a}{b}$$

i generalitzà aquesta equació proposant

$$\frac{y'}{y} = \frac{x - a}{F(x)}, \; F(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k .$$

Aquí també a i les b_k es calculen pels moments empírics. Hom obté així tota una família de distribucions que encara que no són directament emparentades amb la normal ho són amb l'equació diferencial que és una generalització de la que dóna la normal.

L'excessiva fe en la llei normal porta a estudiar sèries estadístiques amb més d'un màxim com si fossin sobreposicions de corbes normals.

Són, però, els treballs de Poisson, el principal dels quals és el que porta per títol "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile" i és del 1837, els que acaben a la llarga destronant la llei normal del lloc massa privilegiat on l'havien col·locada.

Poisson observa que en el cas en què p difereix molt de 1/2 (en l'esquema de proves repetides) la representació asimptòtica per la llei normal no és satisfactòria i obté que en el cas de successos amb probabilitats p_n diferents i que $p_n \to 0$ però $n\, p_n = \lambda$, constant, la llei asimptòtica convenient és $p_{mn} = \frac{\lambda m}{m!} e^{-\lambda}$, essent p_{mn} la probabilitat d'obtenir m vegades l'ocurrència del succés en n proves.

Aquesta llei és batejada per Bortkiewicz amb el nom de "llei dels petits nombres" i també fou coneguda amb el nom de "llei dels casos rars". Ara hom la coneix amb el nom de llei de Poisson.

És curiós de constatar que durant bastants anys els dos únics exemples que quasi tots els llibres de probabilitats donaven d'aplicació d'aquesta llei eren els estudiats per Bortkiewicz, que eren "infants suïcidats a Prússia, menors de 14 anys" i "soldats de l'exèrcit prussià morts per una guitza de cavall".

Poisson encara és dins la línia de Laplace, car pretén trobar "lleis universals", així el seu teorema que diu: "Si efectuem n proves independents de cada una de les quals resulta l'ocurrència o no ocurrència d'un succés A, i la probabilitat no és la mateixa en cada prova, aleshores amb probabilitat que s'acosta a la unitat tant com es vulgui podem assegurar que la freqüència $\frac{m}{n}$ d'ocurrències de A es desvia molt poc de la mitjana aritmètica $\overline{p}$ de les probabilitats en cada prova". La considera una llei universal i diu que no és solament un fet matemàtic sinó que és una veritat filosòfica.

Hom pot dir, d'una manera potser no gaire exacta, però suggestiva, que els últims anys del segle XIX i els primers del XX porten a una pèrdua d'importància de la llei normal i a una importància més gran de la llei de Poisson, sobretot quan hom descobreix que aquesta és la llei que correspon als fenòmens radioactius, a la teoria de cues i a altres casos.

Això no vol dir que la llei normal no continuï essent molt important, com es veu en el teorema central del límit, però ha perdut el caràcter de llei universal de l'atzar.

A mitjan segle XIX es presenta una nova tendència en els estudis matemàtics. Apareixen el que podríem anomenar "matemàtics purs" (Cauchy, Abel, Jacobi i més tard Weierstrass).

La matemàtica fins aleshores era principalment el llenguatge amb què s'expressaven les "lleis generals i universals" de la Natura. Jacobi diu que estudia matemàtiques per a l'honor del gènere humà. Sembla que vol dir que no l'interessen les possibles aplicacions de la Matemàtica, i que per ell és més important la Matemàtica per ella mateixa, com una manifestació de l'esperit de l'home.

L'estudi de les probabilitats entra en un atzucac i no interessa gaire els grans matemàtics de l'època. Pot explicar-se, aquest desinterès, per l'excessiva ambició dels probabilistes del principi del XIX. Volien trobar una matemàtica que resolgués els problemes del que ara anomenem Ciències Socials de la mateixa manera que l'Anàlisi havia resolt els problemes de la Física.

V. Definició i fonamentació del concepte de probabilitat

Ja hem donat, en parlar de l'obra probabilística de Laplace, l'anomenada definició clàssica de probabilitat.

És interessant citar ara la paradoxa de D'Alambert.

Segons D'Alambert quan es tracta de la verificació d'un succés només hi ha dos casos possibles: 1er., que es verifiqui el succés; 2on., que no es verifiqui; per tant, totes les probabilitats valen 1/2.

És natural pensar que D'Alambert presenta la paradoxa com una crítica sarcàstica de la definició de probabilitat. La qüestió que es presenta ara és la de donar criteris per a decidir quan els casos possibles seran igualment probables. (*) Ja hem vist el criteri que adopta Laplace (l'absència de raó suficient) que alguns han definit com el principi de la distribució uniforme de la ignorància.

La crítica que hom féu d'aquest criteri, a part del seu caràcter subjectiu, és que només dóna una condició necessària per a saber si dos successos tenen igual probabilitat, però no és suficient. Això és degut al caràcter negatiu del principi.

Ja molt avançat el segle XIX Stuart-Mill (1872) dóna una definició que sembla evitar la qüestió de la igualtat de probabilitat dels casos possibles. Diu: suposem que un succés depèn d'un cert nombre de causes, cada una de les quals d'intensitat mesurable. Mesurem el camp total d'aquestes causes i això serà el denominador de la fracció que expressa la probabilitat del

(*) Hom pot raonar així: en Física no cal donar una definició de massa, n'hi ha prou sabent si dos cossos tenen igual massa o si la massa d'un cos és la suma de les masses de dos cossos.

succés. El numerador serà la mesura del subcamp de causes que produeixen l'ocurrència del succés.

Una crítica immediata és: 1er. Quins antecedents del succés poden ésser considerats causes? 2on. Podent-hi haver diferents grups de successos cada un dels quals pot ésser considerat com el grup de causes, com sabem que el resultat serà independent del grup escollit?

Més endavant Von Kries (1886) proposa l'anomenat principi de la raó suficient o raó peremptòria. Dos successos tenen igual probabilitat si sabem quines són les causes que en fan produir l'un o l'altre i si són de la mateixa intensitat.

Aquest principi té un caràcter objectiu però en són limitades les possibilitats d'aplicació.

Tant el principi de l'absència de raó suficient com el de la raó peremptòria tenen el defecte de no poder-se aplicar quan el nombre de possibilitats és infinit. Exemple: probabilitat d'elegir a l'atzar un punt en un segment.

Cournot en l'any 1836 pren una posició que ara ens sembla més moderna. D'una banda abandona la posició determinista extrema de Laplace i admet l'atzar. D'altra banda fa distinció entre "probabilitat" i mesura de la probabilitat; la probabilitat és objectiva, diu, depèn del fenomen aleatori i no de l'observador, però passa de vegades que l'observador pot no conèixer la mesura de la probabilitat, com passa sovint amb les magnituds físiques.

Al final del segle XIX i principi del XX apareix la "llei empírica de l'atzar" (el punt de vista ara ha canviat, ja no es tracta de definir la probabilitat, sinó que es busca una "axiomàtica"). És evident la influència de les circumstàncies de la Geometria i de l'Aritmètica.

La llei empírica de l'atzar es pot enunciar així:

"La freqüència relativa d'un succés en una sèrie de n proves repetides en les mateixes condicions essencials s'aproxima a un límit definit quan n augmenta indefinidament".

Hem d'observar que no es tracta d'un axioma sinó d'una llei de caràcter físic. Aquest límit al qual s'acosta la freqüència és la probabilitat del succés.

La llei empírica de l'atzar és en la mateixa línia que els "principis" de Mecànica: principi d'inèrcia, principi d'acció i reacció, etc. Són extrapolacions de fets observats.

Prenent com a idea motriu aquesta llei empírica, Von Mises, ja l'any 1919, construeix una "axiomàtica" de la probabilitat que no resisteix els atacs i les crítiques tant dels que en podríen dir "subjectivistes" (Finnetti, Keynes, etc.) com dels purament matemàtics (Frechet, Khintchine, Kolmogorov).

És l'any 1933 que Kolmogorov estableix l'axiomàtica de la probabilitat tal com ara és generalment acceptada.

Podríem parlar ara de les definicions "subjectivistes" de la probabilitat que tenen llur primer representant en Bayes, però això dóna tema per a una altra conferència; podríem dir, amb Kipling, que és una altra història.

VI. Čebyšev i l'escola de St. Petersburg

Čebyšev i la seva escola tanquen el segle XIX, quant al desenvolupament del Càlcul de Probabilitats.

La posició de Čebyšev vol ésser eminentment pràctica. Val la pena de citar la seva frase:

"Els matemàtics han superat dos períodes: en el primer, els problemes eren proposats pels déus (Problema de Delos: duplicació del cub), en el segon pels semi-déus (Pascal, Fermat). Ara som en un tercer període i els problemes són plantejats per consideracions pràctiques".

Observem que tant els déus com els semi-déus parteixen de casos "pràctics". Segons diuen, la duplicació del cub es plantejà per a construir un cub d'or d'un volum doble del que hi havia en el tresor del temple de Delos, i els problemes resolts per Pascal i Fermat també procedien de casos pràctics plantejats per jugadors més o menys professionals.

Sembla deduir-se de la frase de Čebyšev que ell vol prescindir de tota consideració filosòfica o metafísica i atendre solament a la qüestió matemàtica.

Čebyšev es col·loca respecte al Càlcul de Probabilitats en la mateixa posició que Cauchy davant del Càlcul Infinitesimal. La principal obra de Čebyšev i els seus seguidors és precisament rigoritzar i precisar els resultats obtinguts (Lleis dels grans nombres, Teorema central del límit).

Així com després de Cauchy el Càlcul Infinitesimal passa a ésser una Anàlisi Matemàtica i una Teoria de Funcions, el Càlcul de Probabilitat, després de Čebyšev i la seva escola, passa a ésser una Anàlisi Estocàstica i una Teoria de la Probabilitat.